

# Problema del flusso di costo minimo

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa  
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A  
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2019/20

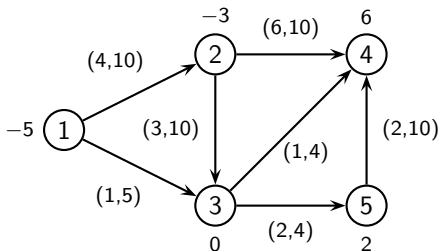
## Problema

Dato un grafo orientato  $(N, A)$  in cui sono definiti

- ▶ un costo  $c_{ij}$  per spedire una unità di flusso sull'arco  $(i, j) \in A$
- ▶ una capacità superiore  $u_{ij}$  per ogni arco  $(i, j) \in A$
- ▶ un bilancio  $b_i$  per ogni nodo  $i \in N$  ( $i$  è detto sorgente se  $b_i < 0$ ,  $i$  è detto pozzo se  $b_i > 0$ )

trovare un flusso sugli archi che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi e che sia di costo totale minimo.

**Esempio 1.** Trovare un flusso di costo minimo sul seguente grafo (su ogni nodo è indicato il bilancio, su ogni arco sono indicati, in ordine, il costo e la capacità superiore).



## Modello

**Variabili decisionali:** per ogni arco  $(i,j) \in A$  definiamo  $x_{ij}$  = flusso sull'arco  $(i,j)$

**Modello di ottimizzazione:**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{(i,k) \in A} x_{ik} - \sum_{(k,j) \in A} x_{kj} = b_k & \forall k \in N \quad (\text{vincoli di bilancio}) \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in A \quad (\text{vincoli di capacità}) \end{array} \right.$$

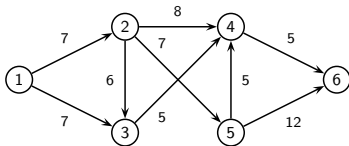
## Casi particolari – cammini minimi

Il problema dell'albero dei cammini minimi di radice  $r$  è un particolare problema di flusso di costo minimo, dove le capacità superiori  $u_{ij} = +\infty$  per ogni  $(i, j) \in A$  ed i bilanci sono  $b_r = -(n - 1)$  e  $b_i = 1$  per ogni  $i \neq r$ .

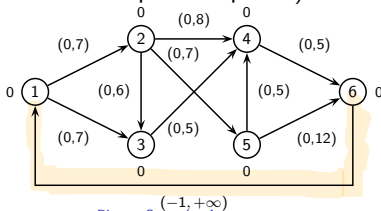
## Casi particolari – flusso massimo

Il problema del **flusso massimo** da  $s$  a  $t$  su un grafo  $(N, A)$  **equivale** ad un **problema di flusso di costo minimo** sul grafo  $(N, A \cup \{(t, s)\})$ , dove  $b_i = 0$  per ogni  $i \in N$ ,  $c_{ij} = 0$  per ogni  $(i, j) \in A$ ,  $c_{ts} = -1$  e  $u_{ts} = +\infty$ . Tale problema è chiamato **problema di circolazione**.

**Esempio 2.** Il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo (sugli archi sono indicate le capacità superiori)



equivale al problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo (sui nodi sono indicati i bilanci mentre sugli archi i costi e le capacità superiori)



## Esistenza di soluzioni ammissibili

Per determinare se esistono soluzioni ammissibili per il problema del flusso di costo minimo su un grafo  $(N, A)$ , si può risolvere il problema del flusso massimo sul grafo  $(N', A')$ , dove

$$N' = N \cup \{s, t\},$$

$$A' = A \cup \{(s, i) : i \in N \text{ tale che } b_i < 0\} \cup \{(j, t) : j \in N \text{ tale che } b_j > 0\},$$

$$u'_{si} = -b_i, \quad u'_{jt} = b_j, \quad u'_{ij} = u_{ij} \text{ per ogni } (i, j) \in A.$$

Sia  $x$  il flusso di valore massimo sul grafo  $(N', A')$ .

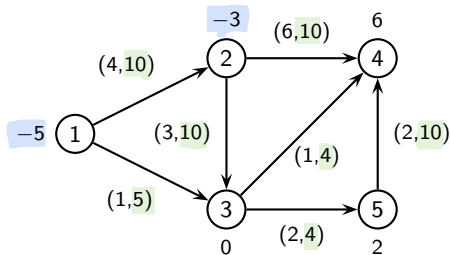
Se il valore di  $x$  è uguale a  $\sum_{\substack{i \in N \\ b_i > 0}} b_i$  (cioè tutti gli archi di  $A' \setminus A$  sono saturi),

allora  $x$  è ammissibile per il problema del flusso di costo minimo,

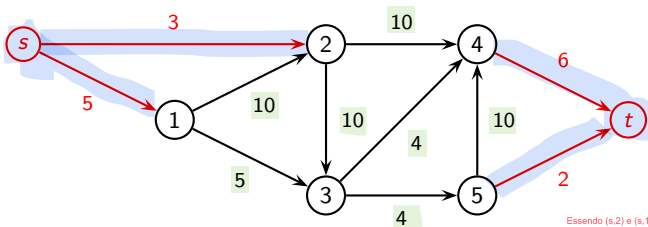
altrimenti il flusso di costo minimo non ammette soluzioni ammissibili.

## Esistenza di soluzioni ammissibili

**Esempio 3.** Per trovare una soluzione ammissibile per il **flusso di costo minimo** sul grafo



si può risolvere il problema del flusso massimo sul seguente grafo (sugli archi sono indicate le capacità superiori):



Verificare che il flusso massimo da  $s$  a  $t$  ha valore uguale a 8.

Essendo  $(s,2)$  e  $(s,1)$  aggiunti, il loro flusso è max. e di conseguenza SATURI

Avendo in uscita da  $s$  8 e ingresso in  $t$ , ho FLUSSO MAX=8

## Condizioni di ottimalità

Ad ogni flusso  $x$  associamo il **grafo residuo**  $G(x) = (N, A')$  in cui l'insieme degli archi  $A'$  è così definito:

- ▶ se  $(i, j) \in A$  con  $x_{ij} < u_{ij}$ , allora  $(i, j) \in A'$  con capacità residua  $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$  e costo  $c'_{ij} = c_{ij}$ ,
- ▶ se  $(i, j) \in A$  con  $x_{ij} > 0$ , allora  $(j, i) \in A'$  con capacità residua  $r_{ji} = x_{ij}$  e costo  $c'_{ji} = -c_{ij}$ .

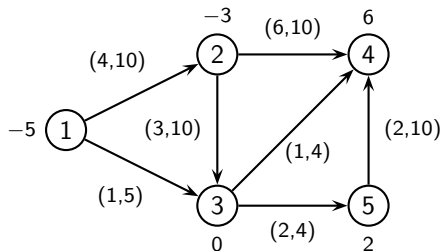
### Teorema

Sia  $x$  un flusso ammissibile.

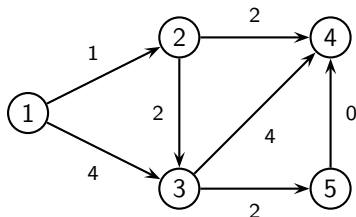
$x$  è ottimo **se e solo se** in  $G(x)$  non esistono cicli orientati di costo negativo (chiamati cicli aumentanti rispetto a  $x$ ).

## Condizioni di ottimalità

**Esempio 4.** Si consideri il problema del flusso di costo minimo sul grafo

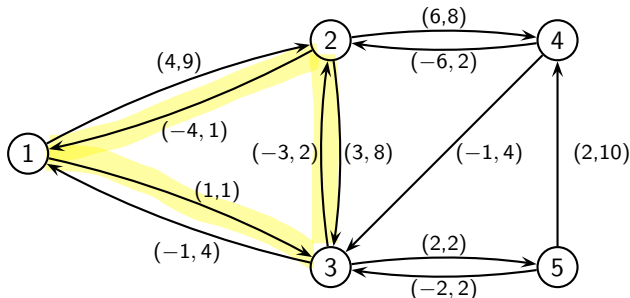


Dire se il seguente flusso ammissibile  $x$  è ottimo oppure no:



## Condizioni di ottimalità

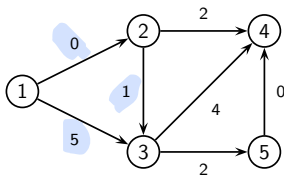
**Esempio 4 (segue).** Il **grafo residuo** associato al flusso  $x$  è il seguente (su ogni arco sono indicati il costo e la capacità residua):



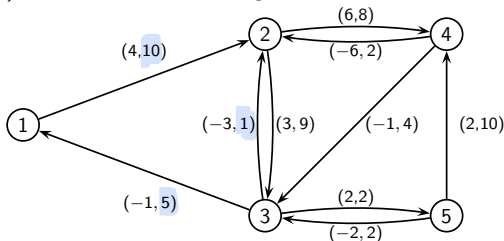
Poiché il **ciclo 1-3-2-1** ha costo  $-6$ , il flusso  $x$  non è ottimo.

## Condizioni di ottimalità

**Esempio 4 (segue).** Se modificiamo il flusso  $x$  spedendo una unità di flusso lungo il ciclo 1-3-2-1, otteniamo il seguente flusso  $x'$ :



Il grafo residuo  $G(x')$  associato a  $x'$  è il seguente:



Poiché in  $G(x')$  non esistono cicli orientati di costo negativo, il flusso  $x'$  è ottimo.

## Pseudoflussi

Uno **pseudoflusso**  $x$  è un **flusso** che rispetta i **vincoli di capacità** degli archi ( $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ ) ma **non necessariamente i vincoli di bilancio** dei nodi.

Se  $x$  è uno pseudoflusso, allora

$$e_x(i) = \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - b_i$$

è chiamato lo **sbilanciamento del nodo  $i$  rispetto a  $x$** .

Indichiamo con

$E_x = \{i \in N : e_x(i) > 0\}$  l'insieme dei **nodì con eccesso di flusso**

$D_x = \{i \in N : e_x(i) < 0\}$  l'insieme dei **nodì con difetto di flusso**

$g(x) = \sum_{i \in E_x} e_x(i)$  lo **sbilanciamento complessivo** di  $x$ .

Uno **pseudoflusso**  $x$  è **ammissibile** (cioè rispetta anche i vincoli di bilancio) se e solo se  $E_x = D_x = \emptyset$  se e solo se  $g(x) = 0$ .

Uno pseudoflusso  $x$  è detto **minimale** se ha **costo minimo** tra tutti gli pseudoflussi aventi lo **stesso vettore di sbilanciamenti**  $e_x$ .

**Teorema.**  $x$  è **minimale** se e solo se non esistono cicli **aumentanti** rispetto a  $x$ .

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

L'algoritmo dei cammini minimi successivi parte con uno pseudoflusso minimale.

Ad ogni iterazione l'algoritmo mantiene uno pseudoflusso  $x$  minimale e cerca nel grafo residuo  $G(x)$  un cammino di costo minimo da un nodo di  $E_x$  (con eccesso di flusso) ad un nodo di  $D_x$  (con difetto di flusso) in modo da diminuire lo sbilanciamento complessivo al minor costo possibile.

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

### Algoritmo

0. Per ogni  $(i, j) \in A$  poni  $x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij} \geq 0, \\ u_{ij} & \text{se } c_{ij} < 0. \end{cases}$
1. Se  $E_x = \emptyset$  allora stop ( $x$  è ottimo)
2. Aggiungi a  $G(x)$  un nodo  $r$  e gli archi  $(r, i)$  per ogni  $i \in E_x$  con costo  $c_{ri} = 0$  e capacità residua  $r_{ri} = +\infty$ .  
Trova in  $G(x)$  un albero dei cammini minimi  $T$  di radice  $r$ .
3. Trova  $t = \arg \min_{i \in D_x} \pi_i$  (nodo di  $D_x$  con potenziale minimo).  
Se  $\pi_t = +\infty$  allora stop (non esistono flussi ammissibili)
4. Indica con  $P$  il cammino da  $r$  a  $t$  contenuto nell'albero  $T$  ( $P$  passa per un nodo  $s \in E_x$ ).  
Calcola  $\delta = \min\{e_x(s), -e_x(t), \min\{r_{ij} : (i, j) \in P\}\}$  (max quantità da spedire lungo  $P$ ).
5. Aggiorna  $x$  spedendo  $\delta$  unità di flusso lungo il cammino  $P$  e torna al passo 1.

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

### Teorema

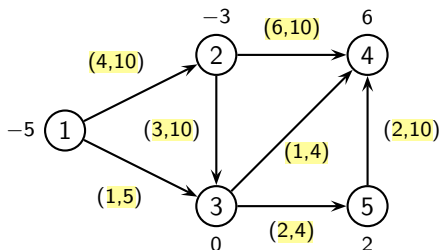
Se le capacità ed i bilanci sono numeri interi, allora l'algoritmo trova una soluzione ottima dopo un numero finito di iterazioni.

### Dim. (sketch)

- ▶ Ad ogni iterazione  $x$  ha componenti intere e quindi anche lo sbilanciamento complessivo  $g(x)$  è intero. Poiché  $g(x)$  diminuisce ad ogni iterazione di almeno una unità, l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di iterazioni.
- ▶ Alla prima iterazione  $x$  è uno pseudoflusso minimale perché in  $G(x)$  non ci sono archi di costo negativo.
- ▶ Poiché ad ogni iterazione si spedisce flusso lungo un cammino aumentante di costo minimo da un nodo di  $E_x$  ad un nodo di  $D_x$ , il nuovo pseudoflusso ottenuto rimane minimale.
- ▶ All'ultima iterazione lo pseudoflusso minimale è ammissibile e quindi è ottimo.

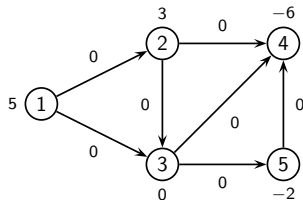
## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Esempio 5.** Applicare l'algoritmo dei cammini minimi successivi per risolvere il problema del flusso di costo minimo sul grafo seguente:



## Algoritmo dei cammini minimi successivi

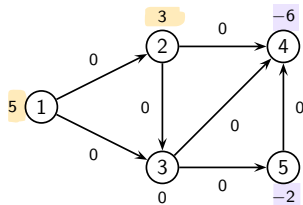
**Iterazione 1.** Lo **pseudoflusso  $x$  iniziale** è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



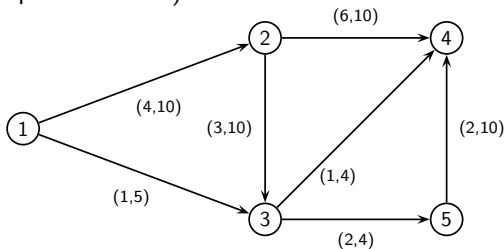
$$E_x = \{1, 2\}, D_x = \{4, 5\}, g(x) = 8.$$

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 1.** Lo pseudoflusso  $x$  iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

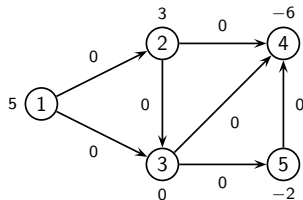


$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 8$ . Il **grafo residuo** è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

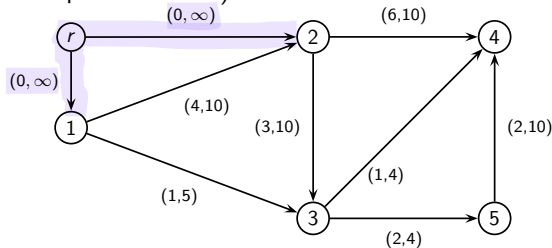


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 1.** Lo pseudoflusso  $x$  iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

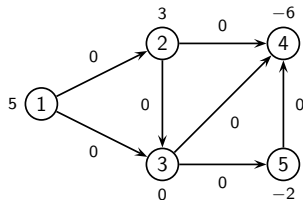


$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 8$ . Il **grafo residuo** è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

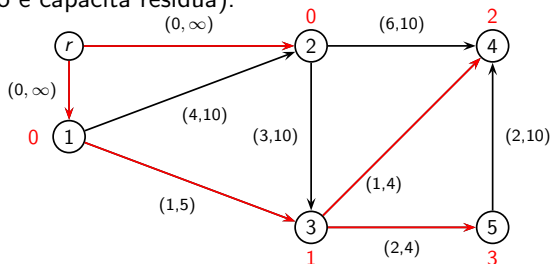


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 1.** Lo pseudoflusso  $x$  iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

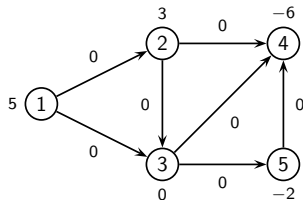


$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 8$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

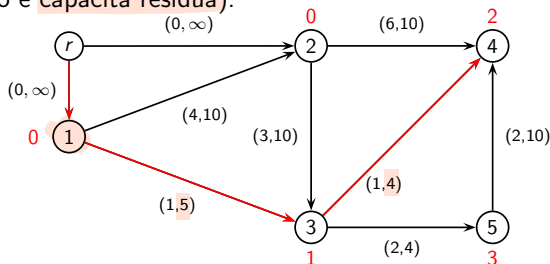


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 1.** Lo pseudoflusso  $x$  iniziale è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



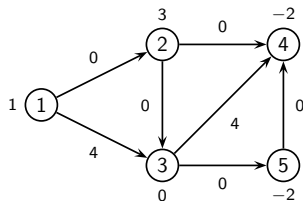
$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 8$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 4$ ,  $P$  è il cammino  $r-1-3-4$  passante per  $s = 1$ , spedisco  $\delta = \min\{5, 6, 4\} = 4$ .

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

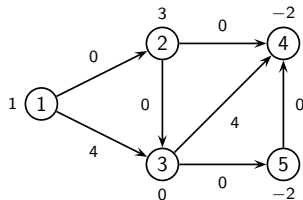
**Iterazione 2.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



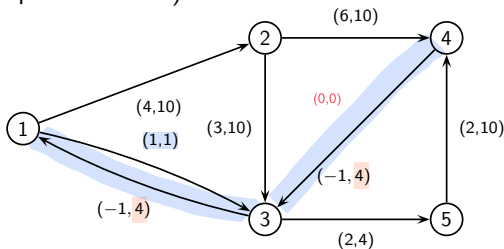
$$E_x = \{1, 2\}, D_x = \{4, 5\}, g(x) = 4.$$

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 2.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

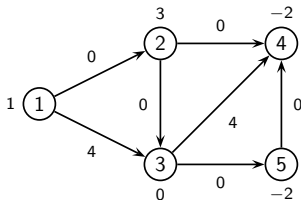


$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 4$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

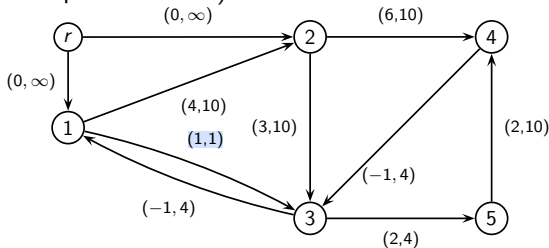


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 2.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

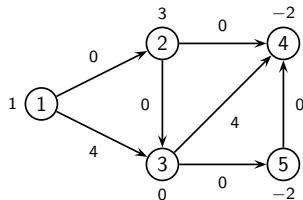


$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 4$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

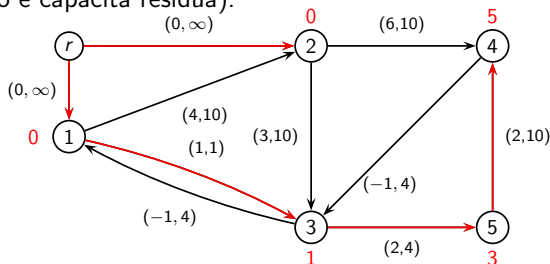


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 2.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

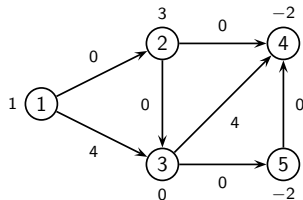


$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 4$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

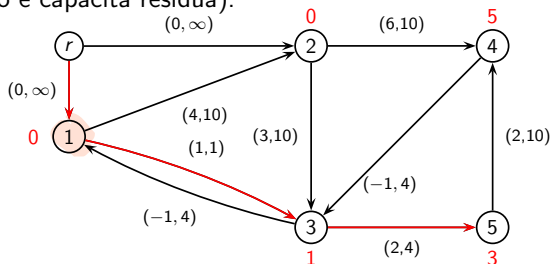


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 2.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



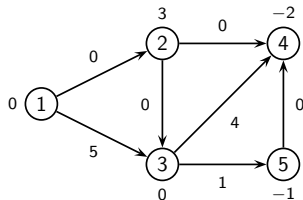
$E_x = \{1, 2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 4$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 5$ ,  $P$  è il cammino  $r$ -1-3-5 passante per  $s = 1$ , spedisco  $\delta = \min\{1, 2, 1\} = 1$ .

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

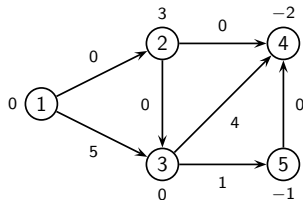
**Iterazione 3.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



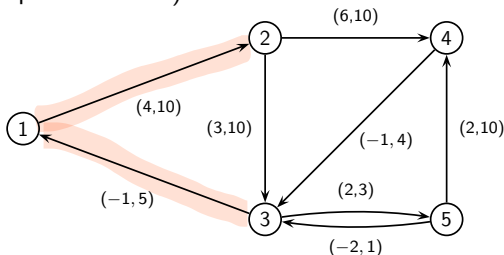
$$E_x = \{2\}, D_x = \{4, 5\}, g(x) = 3.$$

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 3.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

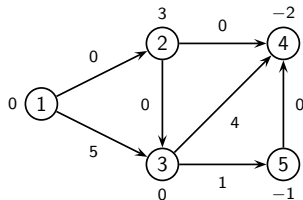


$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 3$ . Il **grafo residuo** è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

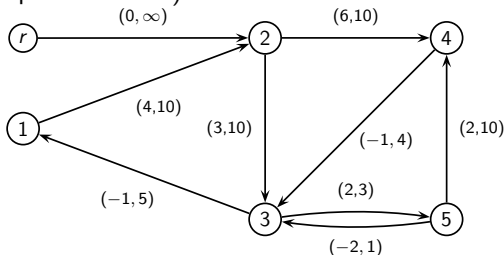


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 3.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

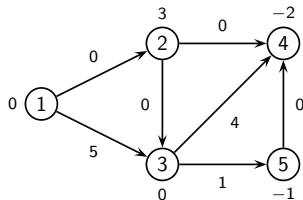


$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 3$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

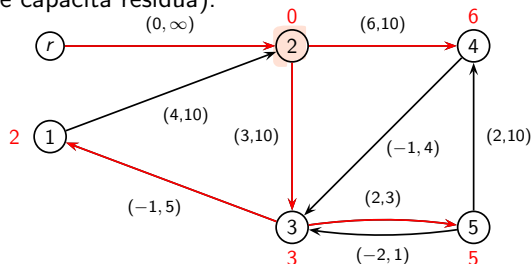


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 3.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

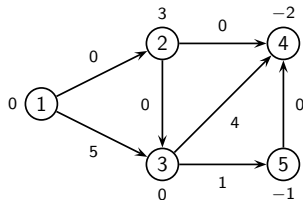


$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 3$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

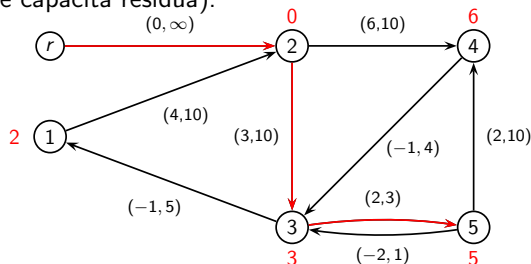


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 3.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



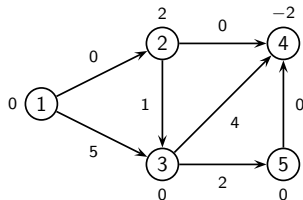
$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = 3$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 5$ ,  $P$  è il cammino  $r$ -2-3-5 passante per  $s = 2$ , spedisco  $\delta = \min\{3, 1, 3\} = 1$ .

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

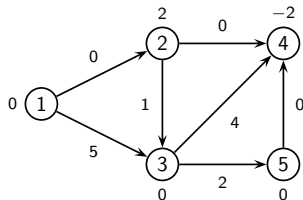
**Iterazione 4.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



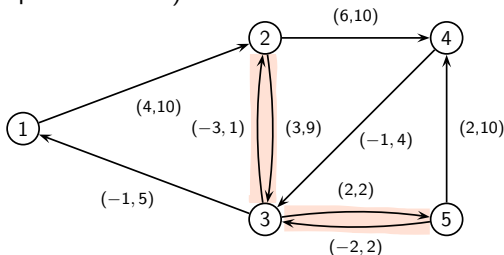
$$E_x = \{2\}, D_x = \{4\}, g(x) = 2.$$

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 4.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

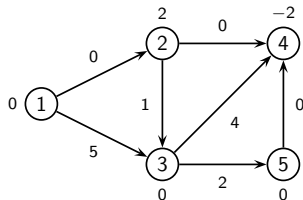


$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4\}$ ,  $g(x) = 2$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

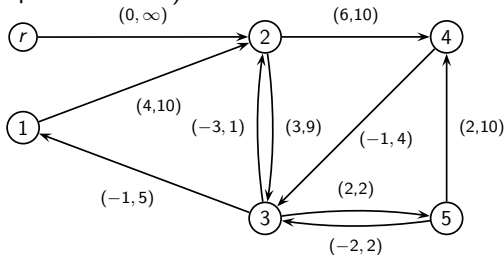


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 4.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

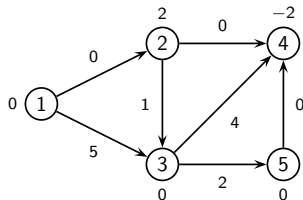


$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4\}$ ,  $g(x) = 2$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

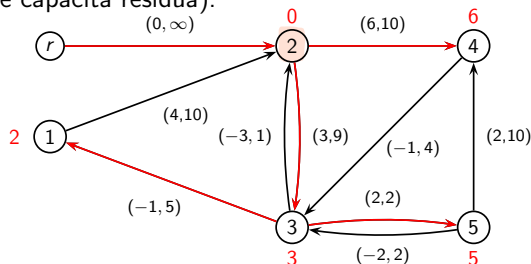


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 4.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):

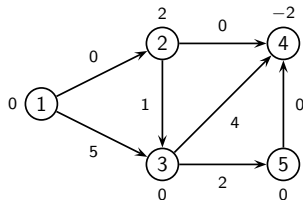


$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4\}$ ,  $g(x) = 2$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):

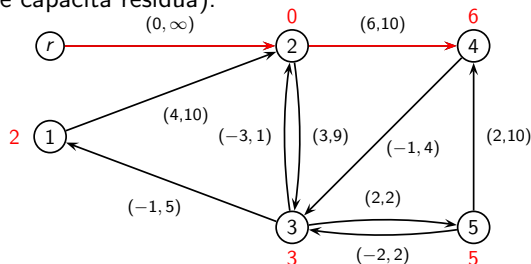


## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 4.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



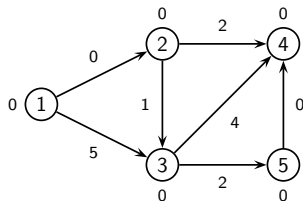
$E_x = \{2\}$ ,  $D_x = \{4\}$ ,  $g(x) = 2$ . Il grafo residuo è il seguente (su ogni arco indichiamo costo e capacità residua):



$t = 4$ ,  $P$  è il cammino  $r$ -2-4 passante per  $s = 2$ , spedisco  $\delta = \min\{2, 2, 10\} = 2$ .

## Algoritmo dei cammini minimi successivi

**Iterazione 5.** Lo pseudoflusso  $x$  è il seguente (su ogni nodo è indicato lo sbilanciamento):



$E_x = D_x = \emptyset$ ,  $g(x) = 0$ , stop,  $x$  è un flusso ottimo.